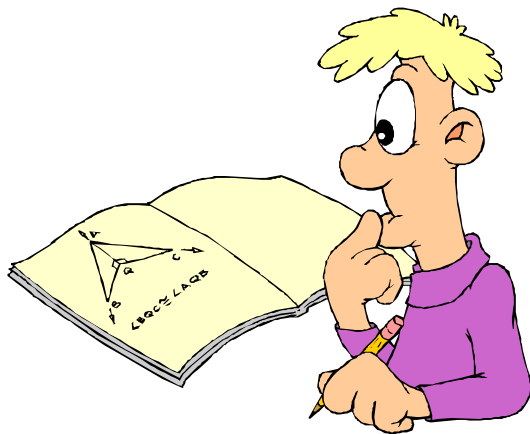


Expressões tão específicas como essas necessitam ser decoradas? Qual será a utilidade delas?



Autor: Não é necessário que o aluno decore essas duas expressões mostradas acima, mas é importante saber que é possível representar os complexos z e w na forma trigonométrica, pois isso terá um papel importante na resolução de muitos dos exercícios que veremos ainda. A dedução, uma vez entendida, poderá ser facilmente reproduzida pelo aluno ao ser requisitado que a mesma seja utilizada.

1.4 Representação Exponencial do Complexo

Eu tenho uma outra idéia de representação para os complexos que facilitará muito a nossa vida quando formos demonstrar algumas relações e propriedades!

Não se assuste com a demonstração. Leia e releia quantas vezes for necessário!



Leonard Euler

Outra forma comum, e muito útil como veremos mais a frente, de se representar um número complexo é usando a sua forma exponencial (forma de Euler):

$$z = |z| \cdot (\cos x + i \cdot \operatorname{sen} x) = |z| \cdot e^{i \cdot x}$$

Fórmula 1.4.1

Demonstração:

Para mostrarmos que todo complexo pode ser escrito na forma exponencial acima, devemos mostrar que, para todo x real, vale:

$$\cos x + i \cdot \operatorname{sen} x = e^{i \cdot x}$$

Para isso, vamos recorrer a um resultado conhecido do Cálculo Diferencial. O Teorema de Taylor diz que funções deriváveis em qualquer ordem num ponto de seu domínio podem ser escritas na forma de um polinômio com grau infinito em torno desse ponto (também chamados de Séries Infinitas).

$$\cos x = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = B_0 + B_1 \cdot x + B_2 \cdot x^2 + B_3 \cdot x^3 + \dots$$

$$e^x = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 + \dots$$

Vamos tentar descobrir os coeficientes desses polinômios. Faremos como exemplo a série infinita de $\cos x$.

$$\cos x = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + \dots$$

A expressão deve ser válida para qualquer x . Fazendo $x = 0$

$$\cos 0 = A_0 + A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0^2 + A_3 \cdot 0^3 + \dots \Rightarrow A_0 = 1$$

Derivando a Série de Taylor de $\cos x$ em relação a x :

$$-\operatorname{sen} x = A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot x + 3 \cdot A_3 \cdot x^2 + 4 \cdot A_4 \cdot x^3 + \dots$$

Novamente a expressão deve ser válida para todo x . Fazendo $x = 0$

$$-\operatorname{sen} 0 = A_1 + 2 \cdot A_2 \cdot 0 + 3 \cdot A_3 \cdot 0^2 + 4 \cdot A_4 \cdot 0^3 + \dots \Rightarrow A_1 = 0$$

Derivando novamente a Série de Taylor em relação a x :

$$-\cos x = 2.A_2 + (3.2.)A_3.x + (4.3)A_4.x^2 + \dots$$

Fazendo $x = 0$:

$$-\cos 0 = 2.A_2 + (3.2.)A_3.0 + (4.3)A_4.0^2 + \dots \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$$

Procedendo desta maneira infinitamente, é fácil ver que a série infinita para $\cos x$ fica:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Deixamos como **exercício** que o leitor demonstre, de maneira análoga, a representação em série das outras duas funções:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

A partir desses resultados podemos escrever:

$$\begin{cases} \cos x + i.\operatorname{sen} x = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i.\frac{x^5}{5!} - \dots \\ e^{ix} = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i.\frac{x^5}{5!} - \dots \end{cases}$$

Como as duas funções são idênticas, chegamos ao nosso resultado de que:

$$\cos x + i.\operatorname{sen} x = e^{i.x}$$

OBS Importante: Muitos livros didáticos diferem do ponto de partida da definição da função exponencial. Muitos usam o resultado da demonstração que acabamos de fazer como sendo a definição formal da função exponencial. No nosso caso, consideraremos que a função exponencial foi definida de uma forma independente bem como foi feita a análise de suas propriedades específicas.



Autor: Quase isso. Foi mencionado que os números complexos têm propriedades similares a exponenciais. Isso ficou claro com a dedução da expressão de Euler. Será que as funções seno e cosseno (que compõem os números complexos) se relacionam de alguma forma com exponenciais?

Vamos demonstrar que sim! Basta lembrar que (se você não enxerga imediatamente, tente demonstrar!):

$$\begin{cases} \operatorname{cis}(x) + \operatorname{cis}(-x) = 2 \cdot \cos(x) \\ \operatorname{cis}(x) - \operatorname{cis}(-x) = 2i \cdot \sin(x) \end{cases}$$

Seguem, então, duas importantes propriedades da forma de Euler do número complexo.

$$\begin{aligned} \frac{e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}}{2} &= \cos x \\ \frac{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}}{2i} &= \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Fórmula 1.4.2

Vejamos a seguir exemplos de aplicação dessa forma de representação de complexos.

Exemplo 1.4.a (IME 2003)

Seja z um complexo de módulo unitário e n um número natural. Mostre que é real o complexo w dado por:

$$w = \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

Solução:

Sabendo que o complexo tem módulo unitário, podemos escrevê-lo na forma exponencial:

$$z = e^{i\theta}$$

$$\therefore w = \frac{e^{i\theta n}}{1 + e^{2i\theta n}} = \frac{1}{\left(\frac{1 + e^{2i\theta n}}{e^{i\theta n}} \right)}$$

Usando o resultado da fórmula 1.4.2:

$$w = \frac{1}{(e^{-i\theta n} + e^{i\theta n})} = \frac{1}{2\cos(n\theta)} \in \mathbb{R}$$

Portanto o complexo w é real.

Exemplo 1.4.b

Sabendo que um complexo z pode ser expresso em sua forma exponencial de Euler, demonstre as seguintes identidades trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \\ \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \sin(a + b) \end{cases}$$

Solução:

Tome o produto de dois complexos de argumentos a e b , nas formas trigonométrica e exponencial:

$$(\operatorname{cis} a) \cdot (\operatorname{cis} b) = e^{i \cdot a} \cdot e^{i \cdot b}$$

$$\Rightarrow (\cos a + i \cdot \operatorname{sen} a) \cdot (\cos b + i \cdot \operatorname{sen} b) = e^{i(a+b)}$$

$$\Rightarrow (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) + i \cdot (\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b) = \operatorname{cis}(a + b)$$

Da identidade dos complexos (Definição 1.2.1), segue que:

$$\begin{cases} \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b = \operatorname{Re}(\operatorname{cis}(a + b)) = \cos(a + b) \\ \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b = \operatorname{Im}(\operatorname{cis}(a + b)) = \operatorname{sen}(a + b) \end{cases}$$

1.5 Propriedades Importantes dos Complexos

Agora que conhecemos as diversas formas de representação de um número complexo, poderemos partir para demonstrar mais algumas importantes propriedades. Veremos a seguir na prática o que já foi mencionado: a representação exponencial é muito útil, pois dará aos números complexos características semelhantes às das funções exponenciais na hora da multiplicação e da potenciação.

Multiplicação de dois números complexos:

$$\begin{cases} z = r \cdot \operatorname{cis} x \\ w = s \cdot \operatorname{cis} y \end{cases} \Rightarrow z \cdot w = (r \cdot s) \cdot \operatorname{cis}(x + y)$$

Fórmula 1.5.1

Demonstração:

Usemos a forma exponencial:

$$z \cdot w = (r \cdot e^{ix}) \cdot (s \cdot e^{iy}) = (r \cdot s) \cdot e^{i(x+y)} = (r \cdot s) \cdot \operatorname{cis}(x + y)$$

Divisão de dois números complexos:

$$\begin{cases} z = r \cdot \operatorname{cis} x \\ w = s \cdot \operatorname{cis} y \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{w} = \left(\frac{r}{s} \right) \cdot \operatorname{cis}(x - y)$$

Fórmula 1.5.2

Demonstração:

Novamente, usemos a forma exponencial:

Capítulo 2 – Números Complexos

Geometria e os Complexos

Neste capítulo apresentaremos a importante relação entre o estudo dos números complexos e questões de geometria. Obviamente, mesmo dominando o conteúdo desse capítulo e resolvendo todos os respectivos exercícios não significará que todos os seus problemas acabaram.

A geometria é, não só um dos ramos mais bonitos da matemática, como também um dos mais difíceis. Por essa razão devemos ter em mente que as questões que serão resolvidas com o auxílio dos números complexos são bastante específicas, e cabe ao aluno saber quando usar essa ferramenta na resolução de um exercício. Para que essa capacidade de distinguir quando ou não usar essa ferramenta se torne mais acentuada, propomos que o leitor dedique sua atenção à leitura desse capítulo. Vamos começar o capítulo exemplificando que os complexos e a geometria caminham lado a lado.

Exemplo: Vamos mostrar, usando um argumento geométrico, a relação já provada analiticamente no capítulo 1 (Exemplo 1.3b).

$$1 + \operatorname{cis}\theta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Representação do círculo unitário no plano complexo:

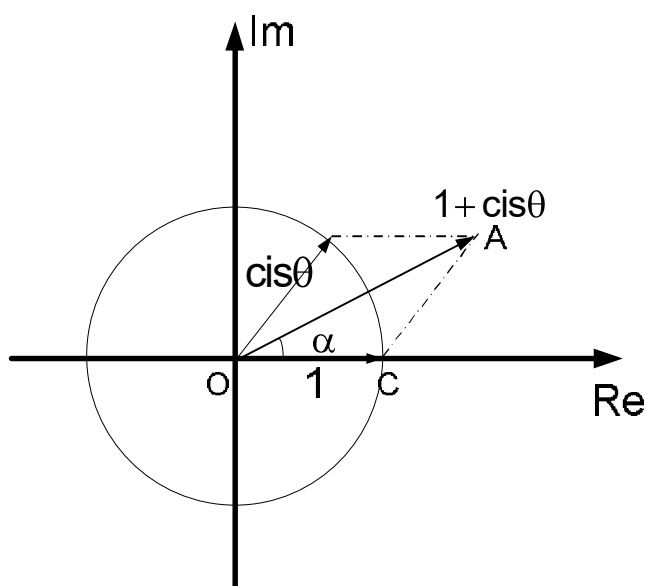


Fig. 1

Vamos ampliar o desenho para fazer algumas observações:

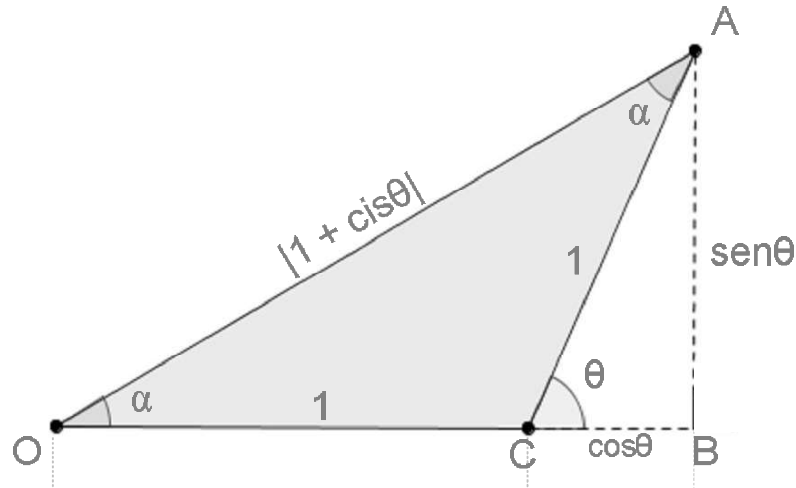


Fig. 2

Note que o triângulo destacado é um triângulo isósceles, cujos lados iguais são iguais ao raio unitário do círculo. Além disso:

$$2\alpha = \theta$$

(ângulo externo)

Podemos, ainda, da geometria do problema (Fig. 2), retirar o seguinte (Teorema de Pitágoras no triângulo OAB):

$$\begin{aligned} |1 + \text{cis}\theta|^2 &= \text{sen}^2\theta + (1 + \cos\theta)^2 \\ &= \text{sen}^2\theta + 1 + 2.\cos\theta + \cos^2\theta \\ &= 2 + 2.\cos\theta = 2.(1 + \cos\theta) \\ &= 2.\left(1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) = 4.\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \therefore |1 + \text{cis}\theta| &= 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Como todo complexo pode ser escrito como: $z = |z|. \text{cis}(\arg z)$, segue que:

$$1 + \text{cis}\theta = 2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Já deu pra sentir o poder da relação geometria/complexos? 😊

2.1 O Complexo como Vetor

Rotação

Já vimos que cada número complexo tem uma representação vetorial no plano complexo de Argand-Gauss. Vamos explorar um pouco mais esse tipo de representação!

Da *Fórmula 1.5.1*, temos que a multiplicação entre dois complexos é feita da seguinte forma:

$$\begin{cases} z = r.\text{cis}x \\ w = s.\text{cis}y \end{cases} \Rightarrow z.w = (r.s).\text{cis}(x + y)$$

Então, imaginemos um vetor representante de $z = r.\text{cis}\theta$ no plano complexo. Que representação geométrica resulta se multiplicarmos z por um complexo $w = \text{cis}\alpha$?

$$z.w = (r.\text{cis}\theta).(\text{cis}\alpha) = r.\text{cis}(\theta + \alpha)$$

O resultado é justamente um complexo similar ao complexo z original, porém rotacionado de um ângulo α no sentido trigonométrico.

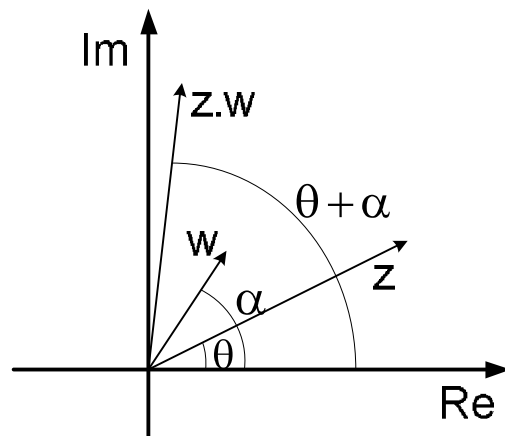


Fig. 2.1.1

Note que o comprimento do resultado da multiplicação é o mesmo comprimento de z .

Como seria o resultado da multiplicação de z por $u = 2\text{cis}\alpha$?

$$z.u = (r.\text{cis}\theta).(2.\text{cis}\alpha) = 2.r.\text{cis}(\theta + \alpha)$$

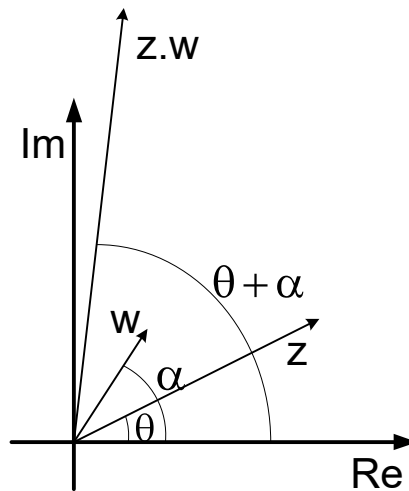


Fig. 2.1.2

Note que o comprimento do resultado da multiplicação agora é o dobro do comprimento de z . Tudo isso está coerente e faz sentido, uma vez que:

$$\begin{cases} z = r.\text{cis}x \\ w = s.\text{cis}y \end{cases} \Rightarrow z.w = (r.s).\text{cis}(x + y)$$

A multiplicação de um complexo $z = |z|.\text{cis}(\arg z)$ por $w = |w|.\text{cis}(\arg w)$ dá um resultado com representante vetorial de módulo igual ao módulo do complexo original z “ampliado” em $|w|$ vezes, rotacionado de um ângulo igual a $\arg(w)$ no sentido trigonométrico.

Obviamente, a divisão de complexos também terá uma característica de rotação. Uma vez que: $(\text{cis}\theta)^{-1} = \text{cis}(-\theta)$, a rotação devido à divisão corresponde a um giro no sentido anti-trigonométrico (sentido horário).

O módulo do vetor representante do resultado da divisão de $z = |z|.\text{cis}(\arg z)$ por $w = |w|.\text{cis}(\arg w)$ será, nesse caso, o comprimento $|z|$ “dividido” em $|w|$ vezes.

Conclusão importante:

Multiplicar um número complexo por i significa rotacioná-lo 90° no sentido anti-horário.

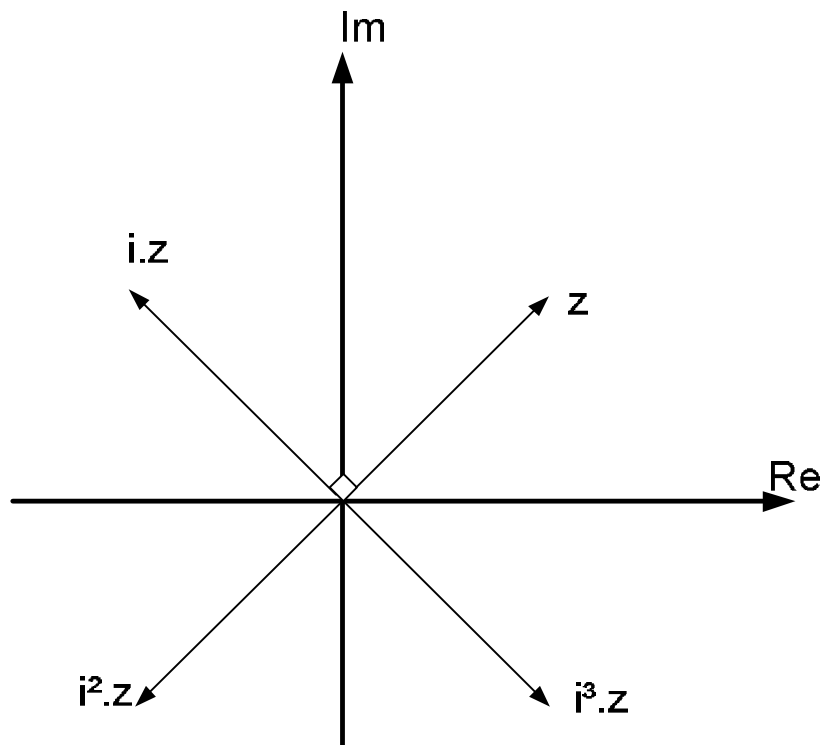


Fig. 2.1.3

Ta legal! Entendi como funciona a rotação de um vetor complexo. Mas como poderá ser cobrado esse conhecimento eventualmente em uma prova?



Autor:

A representação vetorial de complexos nos permite resolver problemas de vetores com a ferramenta dos números complexos e vice-versa!

Vejamos como essa nova ferramenta poderá nos ajudar a resolver aquelas questões trabalhosas de rotação de vetores!

Exemplo 2.1.a Considere o quadro ABCD definido pela diagonal AC com extremidades $A = (1,1)$; $B = (3,4)$. Determine os demais vértices do polígono.

Solução:

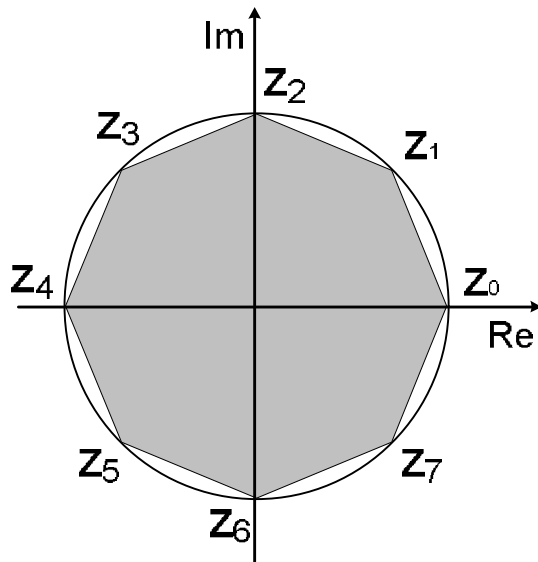


Fig. 2.2.1

Exemplo: $z^8 - 1 = 0$

A soma das raízes da equação, pela relação de Girard, é nula (já estudamos isso!), o que está coerente com o fato do polígono formado acima ser regular (uma vez que, nesse caso, todos os vetores representantes dos afixos se anulam).

Conclusão: Os afixos das raízes n -ésimas da unidade formam no plano complexo um polígono regular de n lados.

Condições para um triângulo ser equilátero

Teorema: Os afixos dos complexos z_1, z_2, z_3 formam um triângulo equilátero, se e somente se $z_1 + w \cdot z_2 + w^2 \cdot z_3 = 0$, onde w é uma raiz cúbica da unidade, diferente de 1.

Resultado 2.2.1

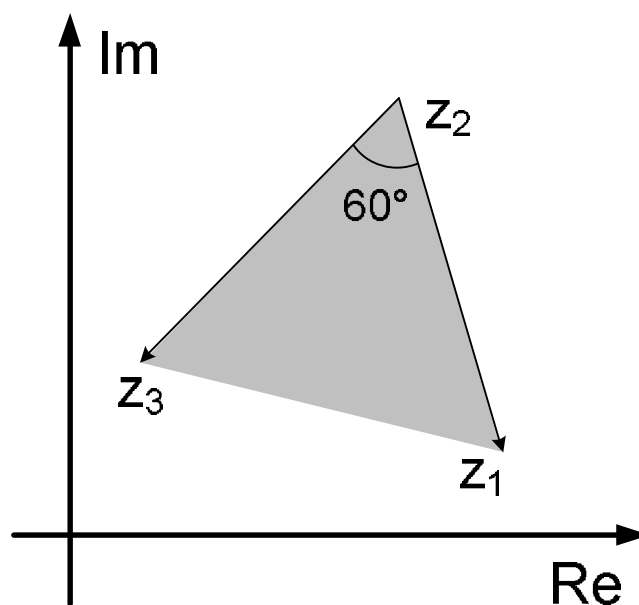
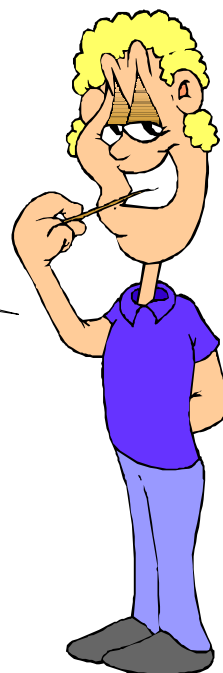


Fig. 2.2.2

Então, dados 3 complexos,
basta eu testar essa
condição para verificar se
eles estão alinhados no
plano complexo ? Gostei !



Condição para que dois triângulos sejam semelhantes

Da geometria, dizemos que dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes nos 2 triângulos são iguais, bem como as razões entre os comprimentos de dois pares de lados correspondentes forem iguais nos dois triângulos.

No caso da semelhança de triângulos com afixos complexos os ângulos internos são dados por argumentos de diferenças entre complexos. Portanto é necessário tomar cuidado também com a orientação do triângulo.

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \neq \Delta z_3 z_2 z_1$$

Da definição acima, temos que dois triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$, $\Delta w_1 w_2 w_3$ são semelhantes (notação: $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$) se e somente se:

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}\right) \text{ e } \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Note que é suficiente dizer que: $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$

Teorema: Dois triângulos são semelhantes ($\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$) se e somente se:

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resultado 2.2.4

Demonstração:

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1 \cdot w_2 + z_3 \cdot w_1 + z_2 \cdot w_3 - z_3 \cdot w_2 - z_2 \cdot w_1 - z_1 \cdot w_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Note que a condição para que um triângulo seja eqüilátero está coerente com esse resultado.

Se o triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ for semelhante ao triângulo $\Delta 1 w w^2$ onde w é uma raiz cúbica da unidade diferente de 1, deveremos ter que o triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ é eqüilátero.

De fato, usando o teorema que acabamos de mostrar:

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & w & 1 \\ z_3 & w^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1 w + z_2 w^2 + z_3 - z_3 \cdot w - z_1 \cdot w^2 - z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot (w - w^2) + z_2 \cdot (w^2 - 1) + z_3 \cdot (1 - w) = 0$$

Se $w^2 + w + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot w(1 - w) + z_2 \cdot (w^2 - 1) + z_3 \cdot (1 - w) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot w(1 - w) - z_2 \cdot (1 - w)(1 + w) + z_3 \cdot (1 - w) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot w - z_2 \cdot \underbrace{(1 + w)}_{-w^2} + z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 \cdot w + z_2 \cdot w^2 + z_3 = 0$$

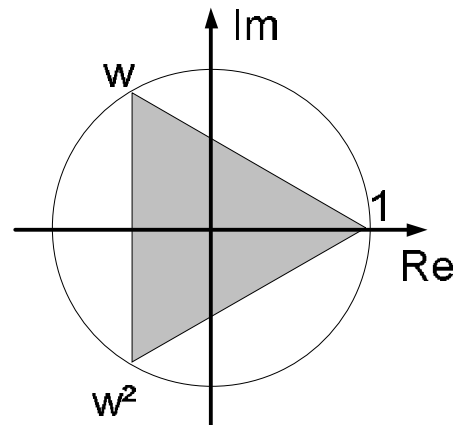


Fig. 2.2.4

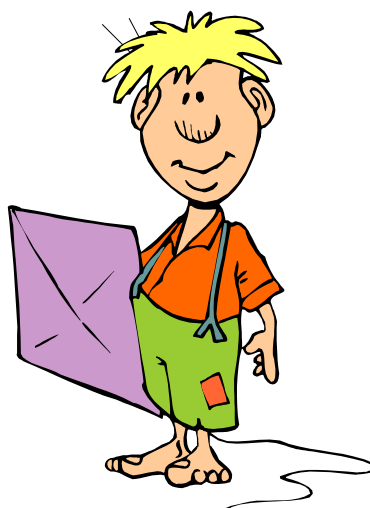
Essa relação é exatamente igual à mostrada quando discutimos a condição para que o triângulo fosse eqüilátero.

OBS: Fica como exercício ao leitor provar que se u , v e w formam um triângulo eqüilátero, então:

$$u^2 + v^2 + w^2 = u.v + u.w + v.w$$

Resultado 2.2.5

Será que vale a pena
decorar todas essas
condições?

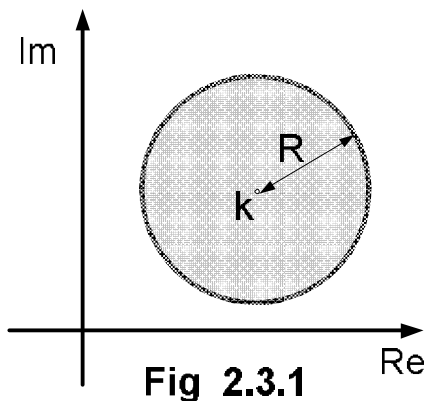


Dica do Autor: Nós apresentamos aqui várias maneiras de testar se um triângulo formado por afixos complexos é eqüilátero (ou até mesmo testar se eles formam uma reta no plano complexo). Cabe ao leitor decidir se essas expressões são ou não práticas na hora da resolução de problemas. Algumas pessoas preferem decorar tais expressões, enquanto outras preferem deduzi-las novamente na hora da resolução do problema. O importante a se tirar como conclusão é que testar se os afixos formam uma reta, ou um triângulo eqüilátero não passa de um problema de geometria analítica (usando vetores!).

2.3 Representações de Lugares Geométricos

Vimos no capítulo I que podemos interpretar o módulo da diferença entre dois complexos como sendo a distância entre os afixos dos mesmos no plano complexo. Muitos lugares geométricos dos mais estudados na geometria analítica são definidos pelo conceito de distância. Não nos preocuparemos com propriedades específicas desses L.G., mas sim, como trabalharmos com eles no ramo dos complexos. Sugerimos que para a total compreensão do que discutiremos a seguir, o aluno tenha uma noção das definições dos L.G. citados, consultando um livro de geometria analítica. Vamos agora justamente analisar como descrever esses lugares geométricos na forma de representação no plano complexo.

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam de um mesmo ponto fixo no plano. A expressão que nos dá a noção de distância é o módulo da diferença entre dois complexos.

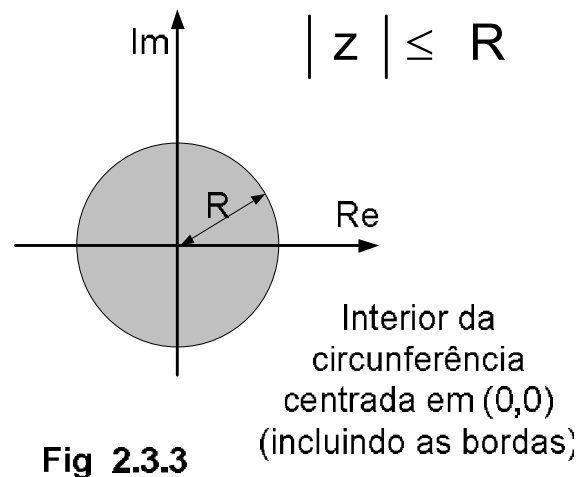
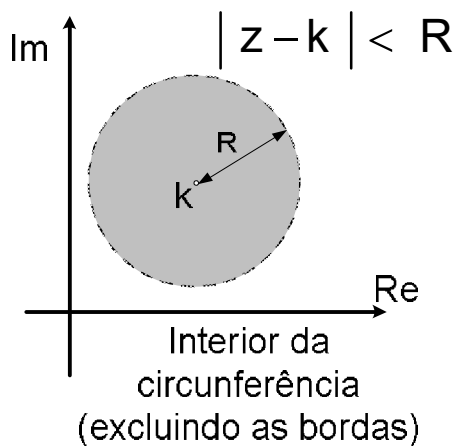


$$|z - k| = R$$

Circunferência de centro em k e raio R

$$k \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}$$

Alguns casos particulares:



Para $Q(x)$:

	1	-15	65	-105	54
1	1	-14	51	-54	0
3	1	-11	18	0	

Ou seja, podemos fatorar $Q(x)$ como:

$$Q(x) = (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 - 11x + 18)$$

As outras duas raízes de $P(x)$ serão as soluções de:

$$x^2 - 11x + 18$$

Ou ainda, temos que todas as raízes de $P(x)$ serão:

1, 3, 2, 9

4.8 Raízes Múltiplas

Definição:

Dizemos que uma raiz k é uma raiz múltipla de um polinômio $P(x)$ quando ela é raiz de $P(x)$ e também raiz do seu quociente da divisão de $P(x)$ por $(x-k)$. Ou ainda, quando $P(x)$ possui o fator $(x-k)$ mais de uma vez em sua fatoração. O número de vezes n em que aparece o fator dirá a ordem de multiplicidade da raiz (se $n = 2$, trata-se de raiz dupla, se $n = 3$, raiz tripla, e assim em diante).

Definição 4.8.1

Exemplos:

0 é raiz dupla de $P(x) = x^2 = (x - 0) \cdot (x - 0)$

1 é raiz tripla de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1)$

Vamos supor um polinômio, sem perda de generalidade, com uma raiz múltipla de ordem n e demais raízes quaisquer.

$$P(x) = (x - k)^n \cdot Q(x)$$

A expressão acima representa tal polinômio onde $Q(x)$ contém os demais fatores devido às outras raízes de $P(x)$.

Exercício 4.9 (IME) Sem resolver a equação, calcule o valor do somatório dos inversos dos cubos das raízes (para m inteiro maior que zero):

$$m.x^4 + 8.x^3 - 139.x^2 - 18.x + 9 = 0$$

Exercício 4.10 Determine as soluções da equação abaixo dados que uma das raízes é igual à soma das outras duas. $36.x^3 - 12.x^2 - 5x + 1 = 0$

Exercício 4.11 (IME - 1995) ✎ Determine o valor de b para que o polinômio, de coeficientes reais, $x^4 + a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ tenha quatro raízes não-reais, duas somando $3 + 4.i$ e as outras duas com produto $13 + i$.

Exercício 4.12 (IME – 2006 adaptada) Seja $p(x)$ um polinômio do 5º grau com coeficientes inteiros (sendo o coeficiente do termo de maior grau unitário). Sabe-se que as cinco raízes de $p(x)$ são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. O número de coeficientes pares de $p(x)$ é?

Exercício 4.13 Mostre que a fatoração a seguir é válida.

$$(1 + x + x^2 + x^3)^2 \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$$

Exercício 4.14 (IME - 2003) ☠ As raízes distintas do polinômio a seguir são $z_1, \dots, z_n$. $P(x) = x + 2.x^2 + 3.x^3 + \dots + 23.x^{23} + 24.x^{24} + 23.x^{25} + \dots + x^{47}$

Seja b_k a parte real de z_k^2 . Determine o valor da soma: $|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|$

Exercício 4.15 (IME - 2000) Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $2.x^m + a^{3n}.x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$, onde a é não-nulo.

Exercício 4.16 O valor da soma das raízes comuns às equações é

$$\begin{cases} x^4 - 7.x^3 + 16.x^2 - 15.x + 3 = 0 \\ x^4 - 3.x^3 - x^2 - 7.x + 2 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.17 (IME – 2004 adaptada) ✎ Determine o valor das raízes comuns das equações:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 - 11.x^2 + 18.x + 18 = 0 \\ x^4 - 12x^3 + 44.x^2 - 32.x - 52 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.18 Determine o polinômio do 3º grau que satisfaça $P(x-1) = P(x) + (2x)^2$ e utilize o resultado para determinar a soma:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2$$

Exercício 4.19 (ITA – 1994) A identidade abaixo é válida para todo x real, diferente de -1 . Determine o valor de $a + b + c$.

$$\frac{x^3 + 4}{x^3 + 1} \equiv 1 + \frac{a}{x + 1} + \frac{b \cdot x + c}{x^2 - x + 1}$$

Exercício 4.20 (ITA) Se $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + ax + b$ e $x^2 + rx + s$, demonstrar que $b = -r \cdot (a + r)$.

Exercício 4.21 (ITA – 1999) Seja $P(x)$ um polinômio de grau m , $A(x)$ e $B(x)$ polinômios de grau maior que um e admita que existam polinômios $C(x)$ e $D(x)$ tais que a igualdade $A(x) \cdot C(x) + B(x) \cdot D(x) = 1$ se verifique para todo x real. Prove que $A(x)$ não é divisível por $B(x)$.

Exercício 4.22 ✎ Determine o maior valor de k inteiro para o qual $(x - 1)^k$ divide $x^{2n+1} - (2n + 1) \cdot x^{n+1} + (2n + 1) \cdot x^n - 1$.

Exercício 4.23 (ITA) Verifique a veracidade da afirmação: “Seja $P(x)$ um polinômio de grau m . Mostre que, se $P(x)$ admite raiz inteira, então $P(-1) \cdot P(0) \cdot P(1)$ é divisível por 3”.

Exercício 4.24 (IME - 2001) Determine a condição que os coeficientes de $P(x)$ do quarto grau devem satisfazer para que $P(x) = P(1-x)$ para todo x real. Resolva este exercício utilizando a condição de identidade entre dois polinômios.

Exercício 4.25 (ITA – adaptada) ✎ Seja um polinômio $P(x)$ do 6º grau, com $P(0) = 1$ e tal que: $P(1) = P(-1) = P(2) = P(-2) = P(-3) = P(3) = 2$. Determine o valor de $P(4)$.

Exercício 4.26 (IME) ⚡ Seja um polinômio $P(x)$ do 5º grau tal que a divisão de $P(x)$ por $(x + 1)^3$ nos dá resto 1 e a divisão por $(x - 1)^3$ nos dá resto -1 . Determine $P(x)$. *Sugestão: Monte as equações de divisão euclidiana do enunciado e derive-as com relação à variável x .*

Exercício 4.27 (ITA – 1994) As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então, quanto vale $a^2 + b^2 + c^2$?

Exercício 4.28 (ITA - 2005) Dada a equação abaixo, em que m é uma constante real, considere as seguintes informações e determine as verdadeiras e as falsas.

$$x^3 + (m+1).x^2 + (m+9).x + 9 = 0$$

- I. Se m pertence a $(-6, 6)$, então existe apenas uma raiz real.
- II. Se $m = -6$ ou $m = 6$, então existe uma raiz de multiplicidade 2.
- III. Qualquer que seja m real, todas as raízes são reais.

Exercício 4.29 (Lidski) ✎ Determine todos os valores reais de a e b para os quais as equações abaixo têm duas raízes comuns e determine essas raízes.

$$\begin{cases} x^3 + ax^2 + 18 = 0 \\ x^3 + bx + 12 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.30 Um polinômio $P(x)$ de grau ímpar ordenado com as potências decrescentes de x , tem seus coeficientes em P.A. Calcule $P(1)$ sabendo que o produto das raízes de $P(x)$ vale 1.

Exercício 4.31 ✎ Determine as soluções da equação abaixo sabendo que o produto de duas de suas raízes é o simétrico do produto de outras duas.

$$144.x^4 - 36.x^3 - 28.x^2 + 11.x - 1 = 0$$

Exercício 4.32 (Lidski) ✎ O sistema de equações abaixo possui raízes reais para qualquer valor real de k . Mostre que $a = 0$.

$$\begin{cases} a.(x^2 + y^2) + x + y - k = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.33 ✎ Resolva as equações abaixo, sabendo-se que a segunda tem uma raiz cujo valor é o triplo de uma raiz da primeira.

$$\begin{cases} x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0 \\ x^3 - 21x^2 + 98x - 120 = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.34 ✎ $P(x)$ é um polinômio de coeficientes inteiros e assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$. Mostre que $P(x)$ não possui raízes inteiras.

Exercício 4.35 Determine os números reais m, n, p tais que a expressão abaixo independa de x .

$$\frac{(2-m).x^3 + (m-1).x^2 + (n+1).x + (p-3)}{x^2 - 6x + 1}$$

Exercício 4.2 Chamemos de x a expressão a ser analisada:

$$x = \underbrace{\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}}_A + \underbrace{\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}}_B$$

Elevando a expressão ao cubo:

$$\begin{aligned} x^3 &= (A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3.A^2B + 3A.B^2 = A^3 + B^3 + 3.A.B. \underbrace{(A + B)}_x \\ &= A^3 + B^3 + 3.A.B.x = (2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) + 3.x.\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5}). (2 - \sqrt{5})} \\ &= 4 + 3.x.\sqrt[3]{-1} = 4 - 3x \end{aligned}$$

Ou seja, x é tal que:

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

Por inspeção, 1 é raiz do polinômio acima, que reduzido por Briot-Ruffini fica:

$$(x - 1).(x^2 + x + 4) = 0$$

As demais raízes serão as raízes de $x^2 + x + 4$, que são complexas! Como os radicais são números reais, segue que:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1 \in \mathbb{Q}$$

Exercício 4.3

A primeira divisão é exata, portanto o resto da divisão algébrica deverá ser identicamente nulo.

$$\begin{array}{r} x^4 + a.x^2 + b \quad \quad \quad | x^2 + 2x + 4 \\ - x^4 - 2.x^3 - 4.x^2 \quad \quad \quad x^2 - 2.x + a \\ \hline - 2.x^3 + (a - 4).x^2 + b \\ \quad 2.x^3 + 4.x^2 + 8x \\ \hline \quad \quad a.x^2 + 8x + b \\ \quad \quad - a.x^2 - 2.a.x - 4.a \\ \hline \quad \quad \quad (8 - 2.a).x + (b - 4a) \equiv 0.x + 0 \end{array}$$

$$\therefore a = 4 \ ; \ b = 16$$

Da mesma forma, devemos igualar o resto da segunda divisão a -5 .

$$\begin{array}{r}
 x^3 + c.x^2 + dx - 3 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 2 \\ x + (c+1) \end{array} \right. \\
 -x^3 + x^2 - 2x \\
 \hline
 (c+1).x^2 + (d-2).x - 3 \\
 -(c+1).x^2 + (c+1).x - 2.(c+1) \\
 \hline
 (c+d-1).x + (-5-2.c) \equiv 0.x - 5
 \end{array}$$

$$\therefore c = 0 ; d = 1$$

Com isso:

$a + b + c + d = 21$

Exercício 4.4 As raízes de $D(x)$ são tais que:

$$\begin{cases} x^4 = 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x = -1, -i, +i$$

Do enunciado: $P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2n+1}$

Note que $P(x)$ é uma soma de uma P.G. de razão x :

$$P(x) = \frac{x^{2n+2} - 1}{x - 1}$$

Como o divisor é do 3º grau, o resto $R(x)$ será no máximo do 2º grau. Sendo assim, a divisão pode ser expressa da seguinte maneira:

$$P(x) = \frac{(x^2)^{n+1} - 1}{x - 1} = (x+1).(x-i).(x+i).Q(x) + \underbrace{a.x^2 + b.x + c}_{R(x)}$$

(Eq. I)

Fazendo $x = -1$ na equação I:

$$\frac{((-1)^2)^{n+1} - 1}{-1 - 1} = \cancel{0.Q(-1)} + a.(-1)^2 + b.(-1) + c \Rightarrow a - b + c = 0 \quad (i)$$

Fazendo $x = i$ na equação I:

$$\begin{aligned}
 \frac{(i^2)^{n+1} - 1}{i - 1} &= \cancel{0.Q(i)} + a.(i)^2 + b.(i) + c \\
 \Rightarrow \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(i-1).(-1-i)} \cdot (-1-i) &= -a + b.i + c \\
 \Rightarrow \left((-1)^{n+2} + 1 \right) \cdot \frac{(1+i)}{2} &= -a + b.i + c \\
 \Rightarrow \begin{cases} \frac{(-1)^{n+2} + 1}{2} = -a + c \\ \frac{(-1)^{n+2} + 1}{2} = b \end{cases} & \\
 &\text{(ii)}
 \end{aligned}$$

Fazendo $x = -i$ na equação I:

$$\begin{aligned}
 \frac{((-i)^2)^{n+1} - 1}{-i - 1} &= \cancel{0.Q(x)} + a.(-i)^2 + b.(-i) + c \\
 \Rightarrow \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(-i-1).(-1+i)} \cdot (-1+i) &= -a - b.i + c \\
 \Rightarrow \begin{cases} \frac{(-1)^{n+2} + 1}{2} = -a + c \\ \frac{-(-1)^{n+2} - 1}{2} = -b \end{cases} & \\
 &\text{(iii)}
 \end{aligned}$$

O resultado de (ii) e (iii) são iguais! Juntando os resultados das equações (i), (ii) e (iii) nos dão o sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ \frac{(-1)^{n+2} + 1}{2} = -a + c \\ \frac{-(-1)^{n+2} - 1}{2} = -b \end{cases}$$

Separemos em dois casos (n par ou n ímpar).

Para n ímpar:

Utilizemos, agora, o Resultado da Soma de Newton, começando com S_1^* :

$$m.(S_1^*) + 8.(S_0^*) - 139.(S_{-1}^*) - 18.(S_{-2}^*) + 9.(S_{-3}^*) = 0$$

$$\Rightarrow -8 + 8.4 - 139.2 - 2.314 + 9.(S_{-3}^*) = 0$$

$$\Rightarrow (S_{-3}^*) = 98$$

Sem resolver a equação, calculamos que:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} = S_{-3}^* = 98$$

Exercício 4.10 Sejam m , n , $m+n$, as raízes da equação. Das relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} m+n+(m+n) = S_G^1 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \\ m.n.(m+n) = S_G^3 = -\frac{1}{36} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} m+n = \frac{1}{6} \\ m.n = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Sabendo a soma e o produto de m e n , temos que m e n serão as raízes da equação:

$$\lambda^2 - \frac{\lambda}{6} - \frac{1}{6} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6.\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = -\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

Daí segue que as raízes serão:

$$\boxed{-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}}$$

Exercício 4.11 Como os coeficientes do polinômio são todos reais, pelo Teorema 4.4.1 teremos que as raízes serão do tipo: z , $\bar{z}$, w , $\bar{w}$.

As duas raízes que somam $3 + 4i$ não podem ser conjugadas entre si, pois o resultado não é real. Portanto, sem perda de generalidade sejam elas z e w . Do enunciado:

$$\begin{cases} z+w = 3+4i \\ \overline{z.w} = 13+i \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \bar{z}+\bar{w} = 3-4i \\ z.w = 13-i \end{cases}$$