

**COLEÇÃO ELEMENTOS
DA MATEMÁTICA**

VOLUME 0

Marcelo Rufino de Oliveira

Com formação pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Desde 1998 desenvolvendo trabalho como:

Coordenador de Turmas ITA/IME

Professor de Matemática de Turmas ITA/IME

Professor de Física de Turmas ITA/IME

Professor de Olimpíadas de Matemática

**COLEÇÃO ELEMENTOS
DA MATEMÁTICA**

0

Marcelo Rufino de Oliveira

**ÁLGEBRA
ARITMÉTICA
PROPORÇÃO
FRAÇÕES**

2ª edição (2020)

Copyright © 2020 by marcelo rufino de oliveira

Todos os direitos desta edição estão reservados
à Marcelo Rufino de Oliveira
Belém – Pará – Brasil
E-mail: marcelorufino@hotmail.com

Ilustração da Capa
Marcelo Rufino de Oliveira

LOUDES PACHECO
Ficha Catalográfica

F48_c.....Oliveira, Marcelo Rufino de

Coleção elementos da matemática, 0: álgebra, aritmética, proporção,
frações / Marcelo Rufino de Oliveira. – 2 ed. - Fortaleza: 2020.
454 p.

ISBN: 978-85-6065318-8



É proibida a reprodução parcial ou total por quaisquer meios sem autorização prévia do autor. os transgressores serão punidos com base no artigo 7º, da lei 9.610/98. Denuncie o plágio ou cópias ilegais anonimamente através do correio eletrônico do autor :

marcelorufino@hotmail.com

Todo o conteúdo dessa obra encontra-se registrado
na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

APRESENTAÇÃO À 2ª EDIÇÃO

Esta é a segunda edição do volume zero da **Coleção Elementos da Matemática**. A coleção foi inicialmente programada para apresentar apenas o conteúdo de Ensino Médio, dividido em seis volumes. Entretanto, os autores acharam interessante também abranger o conteúdo do Ensino Fundamental, notadamente os tópicos cobrados em concursos militares, fazendo com que o volume 0 fosse adicionado à coleção em 2011 e posteriormente atualizado em 2020. Os principais tópicos abordados no volume 0 são álgebra (potenciação e radiciação, operações algébricas, equações e inequações), sistema métrico, frações (ordinárias e algébricas) e razão e proporção. O capítulo sobre bases de numeração, que constava no apêndice do volume 1, agora será abordado com mais detalhes no volume 0.

Os volumes 1, 2, 3, 4 e 5 desta coleção são reconhecidamente voltados para os vestibulares militares de ensino médio, sobretudo ITA e IME. Os autores da coleção têm recebidos excelentes retornos dos candidatos de concursos militares sobre a importância da coleção em sua preparação. Por outro lado, o volume 0 é voltado para os concursos militares de ensino fundamental, como as provas da Epcar e Colégio Naval. Porém, não se engane com relação à complexidade das provas de matemática destes vestibulares, simplesmente por cobrarem conteúdo de ensino fundamental. São provas difíceis, ainda mais se levarmos em consideração o grau (ou a falta!!!) de maturidade de um aluno nos anos finais de ensino fundamental. Mesmo assim, este livro pode ser encarado como um livro de embasamento, pois os assuntos são trabalhados de forma bem mais detalhista e com exercícios iniciais bem acessíveis em relação aos demais volumes da coleção. Nesta segunda edição o autor procurou aumentar a quantidade de exercícios de alta dificuldade, resolvidos e propostos, de modo que o aluno já embasado possa aprofundar mais seus conhecimentos.

Em relação à primeira edição, lançada em 2011, foram incorporadas várias atualizações, tais como:

- 1) introdução de muitos novos exercícios resolvidos e exercícios propostos, com aumento do nível médio de dificuldade dos exercícios do livro, muito em função da inserção de muitas questões de olimpíadas de matemática em vários capítulos desta obra;
- 2) acréscimo de novos tópicos teóricos, principalmente nos capítulos sobre médias e juros;
- 3) correção de alguns gabaritos;
- 4) nova identidade visual;
- 5) organização dos exemplos resolvidos e exercícios propostos em ordem de dificuldade;
- 6) aumento do tamanho da fonte utilizada, motivo de muitas reclamações de leitores nas edições anteriores.

O autor deste volume espera que as atualizações adotadas tornem a leitura e o estudo deste livro em uma experiência bem mais agradável.

Os assuntos neste livro são de uma importância ímpar na matemática, pois formam a sua base algébrica e aritmética. A ideia de número muito provavelmente nasceu com a natural necessidade humana de *contar* os objetos do mundo ao seu redor, como animais, frutas ou pessoas. Para esse propósito (*contagem* ou *cardinalidade*), o conjunto dos números naturais serve perfeitamente.

Com o decorrer do tempo houve a necessidade de *medir* grandezas (massas, comprimentos, volumes, tempo, etc.). Medir uma grandeza significa compará-la com outra, da mesma espécie, denominada unidade de medida (padrão). Entretanto, é de esperar-se que nem todo ser humano (ou qualquer outro material) tenha uma massa correspondente a um múltiplo inteiro de 1 kg. É comum encontrar massas “quebradas”, isto é, do tipo 87,654 kg, por exemplo. Dessa forma, surge a necessidade da noção dos números racionais (ou “fracionários”), para os quais a unidade é subdividida em quantidade conveniente de partes iguais, até que alguma dessas partes caiba um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

O desenvolvimento da simbologia algébrica sofreu uma evolução ao longo de três fases: a álgebra retórica (ou falada), a álgebra sincopada (emprego de abreviaturas de expressões) e a álgebra simbólica. Nesta última fase, o simbologismo algébrico sofreu várias mudanças, até tornar-se razoavelmente estável. Quem teve papel fundamental no estabelecimento da simbologia algébrica foi o matemático francês François Viète, que em seu livro IN ARTEM ANALYTICAMISAGOGE, por introduzir letras como coeficientes numéricos. Posteriormente, quem introduziu uma nova revolução na álgebra foi René Descartes, que foi responsável pela aceitação dos números complexos. A simbologia adotada por Descartes é muito parecida com a utilizada atualmente. Possivelmente, seus textos algébricos sejam os mais antigos em que um aluno de matemática consiga entender perfeitamente toda a notação algébrica. Por exemplo, foi Descartes que adotou letras minúsculas para representar números: x , y e z para variáveis e a , b , c e d para coeficientes. Também introduziu a notação de potência como x^n e passou a escrever as equações na forma canônica, ou seja, igualando as equações a zero.

Em tempos mais antigos, como no Egito e na Babilônia, a álgebra era retórica. Os estudiosos da matemática na Europa do século XVI foram obrigados a estender a noção indo-arábica de número antes de poderem avançar além dos resultados babilônios de resolução de equações. A álgebra estabelecida por Pitágoras e Euclides na Grécia era eminentemente geométrica. O renascimento da álgebra no continente europeu foi devido à muitos fatores, dentre os quais se destacam:

1. Facilidade na manipulação de trabalhos numéricos por meio do sistema de numeração indo-arábico;
2. Invenção da imprensa;
3. Ressurgimento da economia.

A coleção Elementos da Matemática passou por vários formatos de divisão de conteúdos e autores em seus volumes. Atualmente, a coleção está organizada da seguinte maneira:

Volume 0 – Álgebra, Aritmética, Proporção e Frações

Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 1 – Conjuntos, Funções e Teoria dos Números

Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 2 – Geometria Plana

Autores: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 3 – Sequências, Combinatória, Probabilidade e Matrizes

Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 4 – Números Complexos, Polinômios e Geometria Analítica

Autores: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 5 – Geometria Espacial e Trigonometria

Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Até a data de lançamento da 2ª edição deste volume (junho de 2020), os volumes 0, 2 e 5 já estão seguindo o novo formato de identidade visual. A proposta é lançar todos os volumes nesse novo formato em um prazo de 3 anos.

Qualquer erro encontrado em um dos volumes pode ser reportado aos autores no e-mail marcelorufino@hotmail.com. Sua contribuição é muito importante para a melhoria da qualidade das próximas tiragens dos livros.

Bom proveito nos seus estudos!!!

O autor

Índice

Capítulo 1. Potências e Radiciação

1. Potências	1
2. Radiciação	7
3. Expoentes Fracionários	10
4. Expoentes Reais	13
5. Métodos de Aproximação para Extração da Raiz Quadrada	15
Exercícios	20

Capítulo 2. Bases de Numeração

1. Introdução	30
2. Conversão de uma base b para base 10	31
3. Conversão de base 10 para uma base b qualquer	34
Exercícios	37

Capítulo 3. Médias

1. Média Aritmética	40
2. Média Ponderada	40
3. Média Geométrica	40
4. Média Harmônica	40
5. Média Quadrática	41
6. Desigualdade entre as Médias	41
Exercícios	45

Capítulo 4. Sistema Métrico

1. Comprimento	54
2. Área	57
3. Volume	57
4. Ângulo	58
5. Tempo	60
6. Massa	61
7. Conversão entre Unidades Compostas	62
Exercícios	65

Capítulo 5. Razões e Proporções

1. Razão entre Duas Grandezas	76
2. Proporção e suas Propriedades	80
3. Regra de Três Simples	92
4. Regra de Três Composta	97
5. Porcentagem	103
6. Juros	113
Exercícios	120

Capítulo 6. Operações Algébricas

1. Definições	165
2. Adição e Subtração	169
3. Multiplicação	169
4. Produtos Notáveis	171
5. Divisão de Polinômios	177
6. Fatoração	192
7. Máximo Divisor Comum de Polinômios	200
8. Mínimo Múltiplo Comum de Polinômios	203
Exercícios	204

Capítulo 7. Frações

1. Definições	224
2. Transformações	224
3. Operações	228
4. Racionalização de Denominadores Irracionais	240
5. Representação Decimal	247
6. Decimais Exatos	250
7. Dízimas Periódicas Simples	250
8. Dízimas Periódicas Compostas	252
Exercícios	258

Capítulo 8. Equações

1. Identidades e Equações	279
2. Princípios Gerais Sobre a Transformação de Equações	280
3. Equações do 1º Grau	284
4. Equações do 2º Grau	300
5. Equações Biquadradas	311
6. Equações Modulares	314
7. Equações Irracionais	320
8. Sistema de Equações Não-Lineares	326
Exercícios	329

Capítulo 9. Inequações

1. Desigualdades e Inequações	376
2. Operações	377
3. Inequações do 1º Grau	382
4. Sistema de Inequações do 1º Grau do uma incógnita	385
5. Sistema de duas Inequações do 1º Grau com duas incógnitas	387
6. Inequações do 2º Grau com uma incógnita	387
7. Sistemas de Inequações do 2º Grau	392
8. Inequações Envolvendo Funções Produto e Funções Racionais	394
9. Inequações Simultâneas	397
10. Inequações Modulares	399
11. Inequações Irracionais	403
Exercícios	405

Gabaritos	423
---------------------	-----

Demonstração:

$$(A^{-n})^{-m} = \left(\frac{1}{A^n}\right)^{-m} = (A^n)^m = A^{n \cdot m}$$

$$(A^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{A^m}\right)^{-n} = (A^m)^n = A^{n \cdot m}$$

4) Se A e B são números reais ($B \neq 0$) ou expressão algébrica e n é um inteiro positivo: $\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \frac{A^{-n}}{B^{-n}}$

Demonstração:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n = \frac{B^n}{A^n} = \frac{1}{A^n} \cdot B^n = A^{-n} \cdot \frac{1}{B^{-n}} = \frac{A^{-n}}{B^{-n}}$$

5) Se A é um número real não nulo ou expressão algébrica e n e m são números inteiros positivos: $\frac{A^{-n}}{A^{-m}} = A^{-n+m}$

Demonstração:

$$\frac{A^{-n}}{A^{-m}} = \frac{A^m}{A^n} = A^{m-n} = A^{-n+m}$$

Exercícios Resolvidos

Exemplos:

1) (Colégio Naval-86) Sendo $x^2 = 343$, $y^3 = 49^2$ e $z^6 = 7^5$, o algarismo das unidades simples do resultado de $\left(\frac{xy}{z}\right)^{24}$ é

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

Solução: Alternativa A

Inicialmente observe que: $x^2 = 343 = 7^3$, $y^3 = 49^2 = (7^2)^2 = 7^4$

Desenvolvendo obtemos:

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^{24} = \frac{x^{24}y^{24}}{z^{24}} = \frac{(x^2)^{12}(y^3)^8}{(z^6)^4} = \frac{(7^3)^{12}(7^4)^8}{(7^5)^4} = \frac{7^{36} \cdot 7^{32}}{7^{20}} = \frac{7^{36+32}}{7^{20}} = \frac{7^{68}}{7^{20}} = 7^{68-20} = 7^{48}$$

Note agora que $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, ...

Assim: $7^{4k} = (7^4)^k = (2401)^k$

Como toda potência de um número que termine em 1 também vai terminar em 1, então todo número da forma 7^{4k} termina em 1.

$$\text{b) FALSA. } y = \frac{\frac{3^{20} + 3^{10} + 1}{3^{30}}}{\frac{3^{20} + 3^{10} + 1}{3^{40}}} = \frac{3^{40}}{3^{30}} = 3^{10} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$\text{c) VERDADEIRA. } z = \frac{\sqrt[4]{3^4 - 10^2 \sqrt{25^2 \cdot 10^{-4}}}}{(-1)^2 \sqrt[4]{3^2} - 3\sqrt{3}} = \frac{3 - 10^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}} = \frac{3 - 5}{-2\sqrt{3}} = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

$$\text{d) FALSA. } m = 1,111... - (2)^{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{10}{9} - 2^{2-1} = \frac{10}{9} - 2 = \frac{10-18}{9} = -\frac{8}{9} > -1$$

2) Demonstre que existe um número irracional que elevado a um número irracional dá como resultado um número racional.

Solução:

Considere o número $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Uma vez que $\sqrt{2}$ é um número irracional, se x for um número racional, está provado que existe um número irracional que elevado a outro irracional produz um número racional.

Por outro lado, se x for um número irracional, segue que

$$x^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} \right)^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} \right)^2 = 2$$

é um número racional. Ou seja, x (que supomos ser irracional) elevado a $\sqrt{2}$ dá como resultado um número racional.

22) (UERGS-08) O valor de x na igualdade $x = \sqrt[3]{-8} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + 81^{0,25}$ é igual a

- a) 1 b) 3 c) 5 d) 8 e) 10

23) (CM Manaus-17) Maratona é o nome de uma corrida realizada na distância oficial de 42,195 km, normalmente em ruas e estradas. Única modalidade esportiva que se originou de uma lenda, seu nome foi instituído como uma homenagem à antiga lenda grega do soldado ateniense Fidípides, um mensageiro do exército de Atenas, que teria corrido cerca de 40 km entre o campo de batalha de Maratona até Atenas para anunciar aos cidadãos da cidade a vitória dos exércitos atenienses contra os persas e morreu de exaustão, após cumprir a missão.

Sabendo-se que em certa maratona o tempo gasto pelo 1º lugar foi de x horas, onde

x é dado pela expressão $x = -\frac{3}{4} + \left[\frac{((-2)^{(3\sqrt{2}-4}))^{(3\sqrt{2}+4)}}{11} \right]^{-1}$, então podemos afirmar

que:

- A) $x^2 - 1$ é par
 B) $x^x + x$ é um número composto
 C) $3^x - 2$ é um quadrado perfeito
 D) x é um número irracional
 E) $x - 5$ é um número natural divisível por 2017

24) (UESC-07) Considerando-se a expressão $M = \frac{2^{-2} + 0,25^{-2^{-1}} - 2^2}{-2^{-3}}$ pode-se

afirmar que o valor de M é

- a) -14 b) -2 c) 0,5 d) 2 e) 14

25) (UFLA-05) O valor da expressão $\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} \cdot \sqrt{2} - (16)^{0,5}}{\left[(\sqrt{2})^{0,5} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right] \cdot \left[\sqrt[4]{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]}$ é igual a

- a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 9 e) 1

26) (Colégio Naval-78) O valor de $\sqrt[3]{16\sqrt{8}} \cdot \sqrt[6]{0,125}$ é :

- (A) $2\sqrt{8}$ (B) $4\sqrt[3]{4}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt[3]{2}$ (E) $4\sqrt[6]{2}$

Portanto: $\frac{(1+2+3+\dots+84)-4a}{80} = \frac{825}{16} \Rightarrow 3570 - 4a = 4125 \Rightarrow$

$4a = -555 \Rightarrow a$ não é inteiro.

ii) $n = 100$: Sejam $a - 3$, $a - 1$, $a + 1$ e $a + 3$ os números retirados.

Portanto: $\frac{(1+2+3+\dots+100)-4a}{96} = \frac{825}{16} \Rightarrow 5050 - 4a = 4950 \Rightarrow$

$4a = 100 \Rightarrow a = 25 \Rightarrow$ os quatro números são 22, 24, 26 e 28.

iii) $n = 116$:

Sejam $a - 3$, $a - 1$, $a + 1$ e $a + 3$ os números retirados. Portanto:

$\frac{(1+2+3+\dots+116)-4a}{112} = \frac{825}{16} \Rightarrow 6786 - 4a = 5775 \Rightarrow 4a = 1011 \Rightarrow$

a não é inteiro.

Assim, a única possibilidade é $n = 100$ e os números retirados são 22, 24, 25, e 28.

7) (OBM-11) Sendo a e b reais tais que $0 < a \leq 1$ e $0 < b \leq 1$, o maior valor que $\frac{ab}{a+b}$ pode assumir é

- A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Solução: Alternativa D

Observe que $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2} \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ é metade da média harmônica de a e b . Como toda

média, seu valor é máximo quando a e b são máximos, ou seja, iguais a 1, fazendo com que $\frac{ab}{a+b}$ seja igual a $1/2$.

8) (OBM-01) Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ para quaisquer números reais positivos a , b e c .

Solução:

Note que $(a+b)(a+c) = a^2 + ac + ab + bc = a(a+b+c) + bc$

Como a média aritmética de números positivos é sempre maior ou igual que a média geométrica:

$$\frac{a(a+b+c) + bc}{2} \geq \sqrt{a(a+b+c)bc} \Rightarrow (a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

A vazão mínima, em litro por segundo, que essa bomba deverá ter para que a caixa seja esvaziada no tempo estipulado é

- a) 2. b) 3. c) 5. d) 12. e) 20.

Solução: Alternativa E

O volume da caixa d'água é $V = 4.3.2 = 24 \text{ m}^3$

Convertendo para litros: $V = 24 \text{ m}^3 = 24 \cancel{\text{ m}^3} \frac{1000 \text{ litros}}{1 \cancel{\text{ m}^3}} = 24000 \text{ litros}$

Convertendo 20 minutos em segundos:

$t = 20 \text{ minutos} = 20 \cancel{\text{ minutos}} \frac{60 \text{ segundos}}{1 \cancel{\text{ minuto}}} = 1200 \text{ segundos}$

Assim, a vazão, em litros por segundos, vale:

$$Z = \frac{V}{t} = \frac{24000 \text{ litros}}{1200 \text{ segundos}} = 20 \frac{\text{litros}}{\text{segundos}}$$

7) (ENEM-14) O criador de uma espécie de peixe tem sete tanques, sendo que cada tanque contém 14 600 litros de água. Nesses tanques, existem em média cinco peixes para cada metro cúbico (m^3) de água. Sabe-se que cada peixe consome 1 litro de ração por semana. O criador quer construir um silo que armazenará a ração para alimentar sua criação.

Qual é a capacidade mínima do silo, em litros, para armazenar a quantidade de ração que garantirá a alimentação semanal dos peixes?

- a) 511 b) 5 110 c) 51 100 d) 511 000 e) 5 110 000

Solução: Alternativa A

7 tanques com 14600 litros de água cada são $7 \times 14600 \text{ litros} = 102200 \text{ litros}$

Convertendo para m^3 : $102200 \text{ litros} = 102200 \text{ litros} \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ litros}} = 102,2 \text{ m}^3$

Como são 5 peixes por m^3 , pode-se calcular o número total de peixes:

$$5 \frac{\text{peixes}}{\text{m}^3} = \frac{n}{V} \Rightarrow 5 \frac{\text{peixes}}{\text{m}^3} = \frac{n}{102,2 \text{ m}^3} \Rightarrow n = 511 \text{ peixes}$$

Como cada peixe consome 1 litro de ração por semana:

$$1 \frac{\text{litro}}{\text{peixe}} = \frac{V}{n} \Rightarrow 1 \frac{\text{litro}}{\text{peixe}} = \frac{V}{511 \text{ peixes}} \Rightarrow V = 511 \text{ litros}$$

2) Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$ então:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = \frac{\pm a_1 \cdot x_1 \pm a_2 \cdot x_2 \pm a_3 \cdot x_3 \pm \dots \pm a_n \cdot x_n}{\pm a_1 \cdot y_1 \pm a_2 \cdot y_2 \pm a_3 \cdot y_3 \pm \dots \pm a_n \cdot y_n},$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais quaisquer.

Demonstração:

Seja $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$, assim temos que $x_1 = k \cdot y_1, x_2 = k \cdot y_2, \dots, x_n = k \cdot y_n$.

Logo:

$$\frac{\pm a_1 \cdot x_1 \pm a_2 \cdot x_2 \pm a_3 \cdot x_3 \pm \dots \pm a_n \cdot x_n}{\pm a_1 \cdot y_1 \pm a_2 \cdot y_2 \pm a_3 \cdot y_3 \pm \dots \pm a_n \cdot y_n} = \frac{\pm k \cdot a_1 \cdot y_1 \pm k \cdot a_2 \cdot y_2 \pm k \cdot a_3 \cdot y_3 \pm \dots \pm k \cdot a_n \cdot y_n}{\pm a_1 \cdot y_1 \pm a_2 \cdot y_2 \pm a_3 \cdot y_3 \pm \dots \pm a_n \cdot y_n} = k$$

A escolha dos números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ bem como dos sinais é livre, porém respeitando as seguintes condições;

- i) $\pm a_1 \cdot y_1 \pm a_2 \cdot y_2 \pm a_3 \cdot y_3 \pm \dots \pm a_n \cdot y_n \neq 0$
- ii) para cada índice i , o sinal de $a_i \cdot x_i$ e de $a_i \cdot y_i$ deve ser o mesmo

3) Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$ então:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \dots y_n} = \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^n = \left(\frac{x_2}{y_2} \right)^n = \left(\frac{x_3}{y_3} \right)^n = \dots = \left(\frac{x_n}{y_n} \right)^n$$

Demonstração:

Seja $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$, assim temos que $x_1 = k \cdot y_1, x_2 = k \cdot y_2, \dots, x_n = k \cdot y_n$.

Logo: $\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \dots y_n} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} \cdot \frac{x_3}{y_3} \dots \frac{x_n}{y_n} = \underbrace{k \cdot k \cdot k \dots k}_n = k^n$

Exercícios Resolvidos

1) (ENEM-15) Uma fábrica vende pizzas congeladas de tamanhos médio e grande, cujos diâmetros são respectivamente 30 cm e 40 cm. Fabricam-se apenas pizzas de sabor muçarela. Sabe-se que o custo com os ingredientes para a preparação é diretamente proporcional ao quadrado do diâmetro da pizza, e que na de tamanho médio esse custo é R\$ 1,80. Além disso, todas possuem um custo fixo de R\$ 3,00, referente às demais despesas da fábrica.

Sabe-se ainda que a fábrica deseja lucrar R\$ 2,50 em cada pizza grande.

Para o cálculo do montante basta somar os juros ao capital inicial:

$$M = C(1 + i.t)$$

Por exemplo, para calcular o montante de uma aplicação de R\$ 1.200,00 a juros simples de 12% a.t. durante 4 meses e 15 dias, inicialmente deve-se observar que em um trimestre existem 6 quinzenas e que em 4 meses e 15 dias existem 9 quinzenas. Logo, a taxa de juros por quinzena vale $\frac{12\%}{6} = 2\%$ e o tempo da aplicação é de 9 quinzenas. Desta maneira:

$$M = (R\$ 1.200,00)[1 + (0,02)(9)] = R\$ 1.416,00$$

Exercícios Resolvidos

1) (UFPA-00) André devia, em seu cartão de crédito, R\$ 1.000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R\$ 1.440,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?

- a) 7,2 % b) 14,4 % c) 20 % d) 22 % e) 44 %

Solução: Alternativa D

$$M = C(1 + i.t) \Rightarrow 1440 = 1000(1 + i.2) \Rightarrow 1 + 2i = 1,44 \Rightarrow i = 0,22 \Rightarrow i = 22\%$$

2) (EPCAr-05) A diferença entre dois capitais é de R\$ 200,00, estando o maior aplicado a juros simples de 20% ao ano e o menor a juros simples de 30% ao ano. Sabendo-se que os dois capitais produzem os mesmos juros após 1852 dias, pode-se concluir que o capital maior é

Obs.: Considere um ano comercial igual a 360 dias.

- a) R\$ 400,00 b) R\$ 500,00 c) R\$ 600,00 d) R\$ 700,00

Solução: Alternativa C

Na 1ª aplicação a taxa de juros ao dia vale $\frac{20\%}{360} = \frac{1}{18}\%$, enquanto que na 2ª

aplicação a taxa de juros é igual a $\frac{30\%}{360} = \frac{1}{12}\%$. Logo, igualando os juros produzidos após 1852 em cada aplicação:

$$C_1.i_1.t = C_2.i_2.t \Rightarrow C_1 \cdot \frac{1}{1800} \cdot 1852 = C_2 \cdot \frac{1}{1200} \cdot 1852 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}C_1$$

$$\text{Assim: } C_1 - C_2 = 200 \Rightarrow C_1 - \frac{2}{3}C_1 = 200 \Rightarrow C_1 = R\$ 600,00$$

32) (Olimpíada de Minas Gerais-04) Uma mistura do tipo I contém suco de limão, óleo e vinagre na proporção 1:2:3. Numa segunda mistura, do tipo II, a proporção é 3:4:5. Qual é a proporção de suco de limão, óleo e vinagre numa mistura composta de um litro da mistura do tipo I mais um da mistura do tipo II?

33) (OBM-07) Sejam a, b, c e k números reais diferentes de zero satisfazendo as relações $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Qual é o número de possíveis valores que k pode assumir?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

34) (OBM-07) Em uma certa cidade, a razão entre o número de homens e mulheres é 2 : 3 e entre o número de mulheres e crianças é 8 : 1. A razão entre o número de adultos e crianças é:

- A) 5 : 1 B) 16 : 1 C) 12 : 1 D) 40 : 3 E) 13 : 1

35) (Olimpíada do Rio de Janeiro-02) Seu Manoel é dono de uma adega e vende determinadas misturas de vinho. Ele dispõe em seu estoque de um vaso onde há 12 litros de vinho e 18 litros de água e de outro onde há 9 litros de vinho e 3 litros de água. Um cliente fez um pedido especial e Seu Manoel se viu com o seguinte dilema: Quantos litros deveria tirar, de cada vaso, para obter uma mistura com 14 litros que contenham partes iguais de água e vinho?

36) (Olimpíada do Espírito Santo-04) Um saco de balas foi distribuído entre André, Bruno e Carlos na proporção 5:4:3. Eles notaram que se a mesma quantidade de balas fosse distribuída na proporção 7:6:5, um deles receberia 40 balas a mais. Determine o número de balas que cada um recebeu.

37) (Olimpíada de Goiás-13) Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água. Com esta diluição, a quantidade de suco concentrado que eles têm permite servir exatamente 400 ml de suco para cada convidado.

(a) Nestas condições, cada litro de suco concentrado é suficiente para preparar suco para quantas pessoas?

(b) Na última hora avisaram que virão à festa cinco pessoas a mais que o previsto. O líder da equipe pensou rapidamente e concluiu que basta mudarem a diluição do suco para cinco partes de água para cada parte de suco concentrado, e novamente terão o equivalente a 400 ml por pessoa. Diante destas informações, qual era o número de convidados previsto originalmente?

quociente q e o resto r ocupam os mesmos espaços dos números que levam estas denominações na divisão de inteiros. A cada operação escolhe-se um monômio no espaço destinado ao quociente de modo que a multiplicação deste monômio com h forneça um polinômio que subtraído de r_n o grau deste diminua. O exemplo anterior de divisão será agora representado usando a chave que caracteriza a divisão de inteiros.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1 & x^2 + 3x - 2 \\
 -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & \hline
 -2x^3 - 5x^2 + 9x + 1 & \\
 + 2x^3 + 6x^2 - 4x & \hline
 x^2 + 5x + 1 & \\
 -x^2 - 3x + 2 & \hline
 2x + 3 & \longrightarrow \text{resto: } r(x)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 x^2 + 3x - 2 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 1 \rightarrow \text{quociente: } q(x)
 \end{array}$$

Verifica-se que: $x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x - 2) + (2x + 1)$

Perceba que são seguidos os mesmos passos e obtidas as mesmas equações do método de escrever seguidamente $r_n = r_{n-1} - h \cdot q_n$, porém claramente este esquema em chave torna o algoritmo da divisão mais elegante e sucinto.

Exercícios Resolvidos

1) (Colégio Naval-87) O resto da divisão de $(x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 9x - 8)$ por $(x^2 + x - 3)$ é:

- a) independente de x e não nulo b) positivo para $x < \frac{5}{2}$
 c) nulo d) par, para $x \in \mathbb{N}$
 e) igual a 21, para $x = 13$

Solução: Alternativa E

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 9x - 8 & x^2 + x - 3 \\
 -x^5 - x^4 + 3x^3 & \hline
 -2x^3 - x^2 + 9x - 8 & \\
 2x^3 + 2x^2 - 6x & \hline
 x^2 + 3x - 8 & \\
 -x^2 - x + 3 & \hline
 2x - 5 &
 \end{array}$$

Analisando todas as alternativas, verifica-se que a única correta é a letra E.

$$= \frac{\sqrt[5]{81} - \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{3^5} + \sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{81} - \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{36} - \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{16}}{5}.$$

$$6) \frac{\sqrt[10]{2}}{4 + 2\sqrt[5]{5} + \sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[10]{2}}{2^2 + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{2 - \sqrt[3]{5}}{2 - \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[10]{2}(2 - \sqrt[3]{5})}{2^3 - \sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[10]{2}(2 - \sqrt[3]{5})}{3}.$$

3º CASO: Frações da forma $\frac{a}{p^n\sqrt[n]{b} \pm q^m\sqrt[m]{c}}$, com $a \in \mathbb{R}^*$, $p, q, b, c \in \mathbb{Q}^*$, m, n naturais positivos e denominador não nulo.

Nesta situação, reduzem-se os radicais a um mesmo índice e aplicam-se as idéias anteriores.

Exercícios Resolvidos

$$1) \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{9}} \cdot \frac{\sqrt[6]{8^5} - \sqrt[6]{8^4} \cdot \sqrt[6]{9} + \sqrt[6]{8^3} \cdot \sqrt[6]{9^2} - \sqrt[6]{8^2} \cdot \sqrt[6]{9^3} + \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{9^4} - \sqrt[6]{9^5}}{\sqrt[6]{8^5} - \sqrt[6]{8^4} \cdot \sqrt[6]{9} + \sqrt[6]{8^3} \cdot \sqrt[6]{9^2} - \sqrt[6]{8^2} \cdot \sqrt[6]{9^3} + \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{9^4} - \sqrt[6]{9^5}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{9} - 2 \cdot 3 + \sqrt{2} \cdot 3\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{9}}{8 - 9} = 3\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[6]{72} + 6 - 2\sqrt[6]{648} + 4\sqrt[3]{3} - 4\sqrt{2}.$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Alternativamente:

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2^2 - 3^2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Cabe salientar que:

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3},$$

ou seja, ambos os resultados equivalem.

Uma vez que x significa uma quantidade de modelos produzidos por uma empresa, só há sentido no valor positivo calculado, ou seja, $x = 7$. Como $y = 2x$ então $y = 14$. Analisando as alternativas, verifica-se que a única correta é da letra D.

2) (EPCAr-00) A razão entre dois números naturais é igual a 0,333... e o quadrado do menor é igual ao maior acrescido de 10 unidades. A soma desses números é igual a

- a) 3 b) 5 c) 12 d) 20

Solução: Alternativa D

Segundo o enunciado, pode-se escrever duas equações:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 0,333... \\ x^2 = y + 10 \end{cases}$$

Da 1ª equação, tira-se que: $\frac{x}{y} = 0,333... \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x$

Substituindo na 2ª equação: $x^2 = 3x + 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow$
 $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-10)}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 5$

Como $x \in \mathbb{N}$, somente a raiz negativa será levada em consideração: $x = 5$

Assim: $y = 3x \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x + y = 20$

3) (Colégio Naval-95) O trinômio $y = x^2 - 14x + k$, onde k é uma constante real positiva, tem duas raízes reais distintas. A maior dessas raízes pode ser:

- (A) 4 (B) 6 (C) 11 (D) 14 (E) 17

Solução: Alternativa C

Sabe-se que uma equação de 2º grau tem duas raízes reais distintas quando seu discriminante é maior que zero. Assim:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta = (-14)^2 - 4(1)(k) > 0 \Rightarrow \Delta = 196 - 4k > 0 \Rightarrow \Delta = 4(49 - k) > 0$$

Pode-se notar que $\Delta > 0$ quando $k < 49$. Contudo, é dado no enunciado que $k > 0$.

$$\text{Portanto, } 0 < 49 - k < 49 \Rightarrow 0 < \sqrt{49 - k} < 7$$

As soluções do sistema são dadas por:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{4(49 - k)}}{2} = \frac{14 \pm 2\sqrt{49 - k}}{2} = 7 \pm \sqrt{49 - k},$$

onde a maior delas é quando aplicamos o sinal +:

$$x_{\max} = 7 + \sqrt{49 - k} \Rightarrow 7 < x_{\max} < 14$$

Das alternativas apresentadas, apenas o valor indicado na alternativa C está no intervalo acima.

verificou-se que cada pessoa pagaria R\$75,00 a menos do que o inicialmente programado para cada um no primeiro grupo. O número x de pessoas que formavam o primeiro grupo é:

- A) 9. B) 10. C) 11. D) 12. E) 13.

13) (Unicamp-20) Sabendo que a é um número real, considere a equação quadrática $2x^2 + ax + 10 = 0$. Se as soluções dessa equação são números inteiros, o módulo da soma das soluções é igual a

- a) 3. b) 4. c) 5. d) 6.

14) (Fuvest-05) Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R\$96,00, e unidades do produto B, pagando R\$84,00. Sabendo-se que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em R\$2,00 o preço unitário do produto B, determine o número de unidades de A que foi comprado.

15) (Fuvest-08) A soma dos valores de m para os quais $x = 1$ é raiz da equação $x^2 + (1 + 5m - 3m^2)x + (m^2 + 1) = 0$ é igual a

- a) $5/2$ b) $3/2$ c) $-3/2$ d) $-3/2$ e) $-5/2$

16) (UFC-04) As raízes da equação $x^2 - px + q = 0$, onde p e q são constantes, são os cubos das raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$. Determine os valores de p e q .

17) (Colégio Naval-12) A soma das raízes de uma equação do 2º grau é $\sqrt{2}$ e o produto dessas raízes é 0,25. Determine o valor de $\frac{a^3 - b^3 - 2ab^2}{a^2 - b^2}$ sabendo que 'a' e

'b' são as raízes dessa equação do 2º grau e $a > b$, e assinale a opção correta.

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$ c) -1 d) $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$ e) $\sqrt{2} - \frac{1}{4}$

18) (Colégio Naval-20) Multiplicando os valores reais distintos que resolvem a equação $(x^3 - 6x^2 + 12x - 4)^2 - 15(x^3 - 6x^2 + 12x - 4) + 36 = 0$, encontra-se, como resultado:

- a) 4 b) 6 c) 9 d) 12 e) 18

19) (Colégio Naval-13) Determine, no conjunto dos números reais, a soma dos

valores de x na igualdade $\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{x^2 - 3}} \right) \cdot \left(\frac{2}{x - \frac{3}{x}} \right) = 1$

- a) $-2/3$ b) $-1/3$ c) 1 d) 2 e) $11/3$

29) (Olimpíada do Rio de Janeiro-18) Sejam x, y e z números reais positivos tais que:

$$a = \frac{xy}{x+y}, \quad b = \frac{xz}{x+z}, \quad c = \frac{yz}{y+z}.$$

Calcule x em função de a, b e c .

30) (Olimpíada da Áustria-02) Resolva o seguinte sistema de equações no conjunto dos números reais:

$$\begin{cases} 2x_1 = x_5^2 - 23 \\ 4x_2 = x_1^2 + 7 \\ 6x_3 = x_2^2 + 14 \\ 8x_4 = x_3^2 + 23 \\ 10x_5 = x_4^2 + 34 \end{cases}.$$

Dica: some todas as equações e monte quadrados perfeitos

31) (Canadian Open Challenge-97) Determine todos os números reais x, y e z tais que

$$\begin{aligned} x - \sqrt{yz} &= 42 \\ y - \sqrt{xz} &= 6 \\ z - \sqrt{xy} &= -30 \end{aligned}$$

32) (Canadian Open Challenge-05) Determine todas as triplas ordenadas (x, y, z) tais que

$$\begin{aligned} x^2 - yz + xy + zx &= 82 \\ y^2 - zx + xy + yz &= -18 \\ z^2 - xy + zx + yz &= 18 \end{aligned}$$

33) Resolva os sistemas de equações:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}; \\ x + yx + y = 9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{\frac{y+1}{x-y}} + 2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 3; \\ x + xy + y = 7 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y^2 + \sqrt{3y^2 - 2x + 3} = \frac{2}{3}x + 5; \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a \\ \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} = a^2; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4; \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$

17) (PUC/MG-11) A e B são duas empresas de táxi. Enquanto a empresa A cobra R\$3,80 de bandeirada e R\$1,40 por quilômetro rodado, a empresa B cobra R\$2,40 por quilômetro rodado e não cobra bandeirada. Para o usuário, é CORRETO afirmar que:

- a) a empresa A é sempre mais vantajosa.
- b) a empresa B é sempre mais vantajosa.
- c) em corridas inferiores a 3.800m, a empresa A é mais vantajosa.
- d) em corridas inferiores a 3.800m, a empresa B é mais vantajosa.

18) (Colégio Naval-89) Um subconjunto do conjunto solução da inequação

$$\frac{1+4x-x^2}{x^2+1} > 0 \text{ é}$$

- (A) $\{x \in \mathbb{R} / x > 5\}$
- (B) $\{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$
- (C) $\{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$
- (D) $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 4\}$
- (E) $\{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$

19) (Colégio Naval-90) O maior valor inteiro que verifica a inequação

$$x.(x-1).(x-4) < 2.(x-4) \text{ é:}$$

- (A) 1
- (B) negativo
- (C) par positivo
- (D) ímpar maior que 4
- (E) primo

20) (Colégio Naval-03) Se **a** e **b** são dois números reais, denotarmos por $\min(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

o menor dos números **a** e **b**, isto é, $\min(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{se } \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{b}, & \text{se } \mathbf{a} \geq \mathbf{b} \end{cases}$. O número de soluções

inteiras negativas da inequação $\min(2\mathbf{x} - 7, 8 - 3\mathbf{x}) > -3\mathbf{x} + 3$ é igual a.

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

21) (Colégio Naval-91) Sejam os conjuntos $\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \frac{\mathbf{x}-3}{\mathbf{x}+5} \geq 0 \right\}$,

$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid (\mathbf{x}-3)(\mathbf{x}+5) \geq 0 \right\}$ e $\mathbf{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x}-3 \geq 0 \text{ e } \mathbf{x}+5 \geq 0 \right\}$.

Pode-se afirmar que:

- a) $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$
- b) $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{C}$
- c) $\mathbf{A} \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{B}$
- d) $\mathbf{C} \subset \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$
- e) $\mathbf{C} \subset \mathbf{A} = \mathbf{B}$

22) (CM Santa Maria-18) O clube de matemática, conhecido como Mathema, tem como um dos seus objetivos auxiliar os alunos na construção do conhecimento de matemática, preparando os mesmos para competições por meio da aplicação dos conteúdos vistos em sala de aula. Pensando nisso, o professor propôs aos participantes do clube os seguintes desafios: